1834. ANNALEN №. 17.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND XXXIII.

XXVIII. *Ueber die optischen Axen und die Farben zweiaxiger Krystalle im polarisirten Licht; von F. E. Neumann, Prof. in Königsberg.*

§. 1.

Brewster entdeckte zuerst die Klasse von Krystallen, welche jetzt in der Optik den Namen der *zweiaxigen Krystalle* führen. Die beiden Axen nannte er diejenigen Richtungen, in welchen der Krystall von denjenigen Strahlen durchlaufen ist, die von dem Mittelpunkt der im polarisirten Licht entstehenden Farbenringe nach dem Auge gehen. Biot stellte in Beziehung auf diese *so bestimmten* optischen Axen das Gesetz der Geschwindigkeiten der beiden Strahlen auf, welche durch Doppelbrechung in dem Krystall entstehen, nämlich dafs, im Sinne der Emanationstheorie, die Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten der beiden Strahlen, wenn sie sich in derselben Richtung bewegen, proportional dem Producte der Sinusse der Winkel ist, welche diese Richtung mit den optischen Axen bildet. Dieses Gesetz bestätigte er einerseits durch zahlreiche Refractionsbeobachtungen (*Mém. de l'Inst.* 1818), andererseits reducirte er auf dieses analytische Gesetz die von Brewster gegebene geometrische Construction für die Farbenringe. Fresnel mufste in seiner scharfsinnigen Theorie der doppelten Strahlenbrechung eine theoretische Definition geben von denjenigen Richtungen, welche man die optischen Axen genannt hatte. Anfänglich nennt er diese Richtungen die Normalen der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche (dies Annal. Bd. XXIII S. 503); später aber, nachdem er gefunden, dafs das Biot'sche Gesetz für den Unterschied der

Quadrate der Geschwindigkeiten der beiderlei Strahlen, wenn ihre gemeinschaftliche Richtung auf die Normalen der Kreisschnitte des Ellipsoids, dessen Radien die Geschwindigkeiten der Lichtstrahlen vorstellen, bezogen wird, eine strenge Folge seiner Theorie ist, läfst er die erste Bestimmung fallen und erklärt sich a. a. O. S. 538 dafür, die Normalen der Kreisschnitte des Ellipsoids die optischen Axen zu nennen, also diejenigen Richtungen, in welchen die beiderlei Strahlen den Krystall mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen. Ob in dieser Bestimmung nur ein theoretischer Name für die Normalen der letzteren Kreisschnitte gegeben werden sollte, erhellt nicht ganz entschieden; es scheint aber aus einigen späteren Aeufserungen Fresnel's in derselben Abhandlung hervorzugehen, dafs seine Meinung gewesen sey, die Normalen dieser Kreisschnitte seyen wirklich dieselben Richtungen, welche Brewster und Biot optische Axen genannt haben, d. h. diejenigen Richtungen, welche bei den Farbenringen durch die von ihrem Mittelpunkt nach dem Auge gehenden Strahlen (d. i. durch die *scheinbaren optischen Axen*) im Innern des Krystalls bestimmt werden. Jedenfalls hat diese Meinung bei Denjenigen Eingang gefunden, welche sich später mit der experimentellen Bestimmung der Lage der optischen Axen beschäftigt haben, namentlich bei den Herren Rudberg und Brewster. Ersterer, Hr. Rudberg, macht zwar in seiner ausgezeichneten Untersuchung der Refraction zweiaxiger Krystalle (diese Annalen, Bd. XVII S. 26) auf eine Schwierigkeit, die in dieser Ansicht wegen der Divergenz beim Austritt der Strahlen, welche in der Richtung der Normale der Kreisschnitte des Ellipsoids den Krystall durchlaufen haben, stattfindet, aufmerksam, da er jedoch diese nicht beseitigt, auch, in der späteren, sehr schönen Arbeit von Hamilton und Lloyd (diese Ann. Bd. XXVIII S. 91) über die optischen Eigenschaften der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche und des Ellipsoids die Frage nicht

zur Entscheidung kommt, welche theoretische Bedeutung die durch die scheinbaren optischen Axen im Innern des Krystalls bestimmten Richtungen haben, so schien es mir nicht überflüssig zur Erledigung dieser Frage die folgenden Bemerkungen mitzutheilen.

Es sey *abcd*, Fig. 1 Taf. I, ein senkrechter Durchschnitt eines Krystallblättchens, durch welches die Farben im polarisirten Lichte beobachtet werden. Es sey EI'' ein auf das Blättchen fallender Strahl homogenen Lichtes, EG sein durch die Refraction erzeugter ungewöhnlicher Strahl und EG' sein gewöhnlicher [1]). Es sey OI' ein anderer mit EI'' parallel auffallender Strahl derselben Farbe, welcher in die Strahlen OG'' und OG' getheilt wird, jener OG'' parallel mit EG ist der ungewöhnliche, dieser OG parallel mit EG' ist der gewöhnliche Strahl. Die beiden Strahlen OG und EG treffen in G, d. i. in demjenigen Punkt, in welchem sie aus dem Blättchen heraustreten, zusammen, und werden hier beide so gebrochen, daſs sie in derselben Richtung GA, nämlich parallel mit OI' und EI'', auſserhalb des Krystalls sich fortpflanzen; sie gelangen aber an irgend einem Punkt dieser Richtung, z. B. nach A, nicht zu gleicher Zeit an, denn sie haben zweierlei Wege durch das Blättchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten zu durchlaufen gehabt; sie werden also mit einander interferiren, vorausgesetzt, daſs, da diese Strahlen als polarisirte Strahlen aus dem Blättchen heraustreten, die Bedingungen für die Interferenz polarisirter Strahlen erfüllt sind, nämlich daſs die einfallenden Strahlen EI'' und OI'' schon polarisirt waren, und daſs nach dem Austritt die Polarisa-

1) Den gewöhnlichen Strahl nenne ich denjenigen, dessen Polarisationsebene den Winkel, welcher durch die zwei Ebenen gebildet wird, die durch die Normale der Wellenebene des Strahls und durch die Normalen der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche gelegt sind, so halbirt, daſs ihre Durchschnittslinie mit der Ebene dieser Normalen in ihrem spitzen Winkel liegt.

tionsebenen] der beiden in der Richtung GA sich bewegenden Strahlen auf eine gemeinschaftliche Polarisationsebene zurückgeführt wurden.

Die beiden Strahlen EI'' und OI' haben ihren Ursprung in derselben Lichtquelle, und sind also Radien der Wellenoberfläche; die Entfernung dieser Lichtquelle von dem Blättchen ist in Beziehung auf den gegenseitigen Abstand der Strahlen EI'' und OI' von einander, da sie parallel sind, als sehr weit angenommen; es kann also die ihnen gemeinschaftliche Wellenoberfläche dargestellt werden durch eine durch E senkrecht auf die Strahlen gelegte Ebene EW, wo W der Durchschnitt der senkrechten Ebene mit dem Strahle OI' ist. Bei E und W sind beide Strahlen zugleich angelangt; die Verzögerung des einen Strahls gegen den andern, welche von hier an eingetreten ist, erhält man, wenn man die Zeiten berechnet, welche der eine Strahl gebraucht, um von E nach G auf dem Wege EG zu gelangen, und die Zeit, welche der andere Strahl gebraucht, um von W auf dem gebrochenen Wege WO und OG nach demselben Punkte G zu gelangen. Die Differenz dieser Zeiten ist die verlangte Verzögerung, und wenn man diese Differenz durch die Schwingungsdauer, welche der Farbe der homogenen Strahlen OIO, EIO entspricht, dividirt, so erhält man den Unterschied der Phasen der beiden in der Richtung GA interferirenden Strahlen.

Es sey V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem unkrystallinischen Medium, von welchem das Blättchen umgeben ist, und O und E seyen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des gewöhnlichen Strahls GO und des ungewöhnlichen GE; alsdann ist die Zeit, welche zum Durchlaufen des Weges EG gehört, $\frac{EG}{E}$, und die, welche zum Durchlaufen der Wege WO und OG erforderlich ist, $\frac{WO}{V}+\frac{OG}{O}$ und, wenn τ die Schwingungsdauer bezeichnet, der Unterschied der Phasen:

$$\left\{\frac{WO}{V}+\frac{OG}{O}-\frac{EG}{E}\right\}\frac{1}{\tau}.$$

Die relative Lage der beiden Strahlen OI' und EI'' läſst sich dadurch bestimmen, daſs man den Strahl AG als einen auf das Blättchen fallenden Strahl ansieht, welcher in die beiden Strahlen GO und GE getheilt wird, welche, aus dem Blättchen heraustretend, die Strahlen OI' und EI'' erzeugen. Es liegen also im Allgemeinen die Strahlen AG, GO, GE, OI', EI'' nicht in Einer Ebene, wie wir der Einfachheit der Darstellung wegen es bis jetzt angenommen haben. Die Ebene der Zeichnung in Fig. 1 Taf. I sey durch den Strahl AG und die Normale des Blättchen GN gelegt, die Linien GO, GE, OI', EI'' seyen die geraden Projectionen der aus AG entstehenden Strahlen auf diese Ebene, und es mögen die diesen Projectionen entsprechenden Strahlen bezeichnet werden mit Go, Ge, oi', ei'', wo o und e die wirklichen Austrittspunkte des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls aus dem Blättchen darstellen, und oi', ei'' zwei mit AG parallele Strahlen sind. Der in Fig. 1 mit W bezeichnete Punkt ist die Projection des Durchschnittspunktes des Strahles oi' mit der durch e senkrecht auf ei'' gelegten Ebene; dieser projicirte Punkt soll mit w bezeichnet werden. In Fig. 2 Taf. I ist die Ebene der Zeichnung die Austrittsfläche des Blättchens ab, durch welche die Strahlen Ge und Go in e und o austreten, ab die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der durch AG und GN gehenden Einfallsebene.

Der Unterschied der Phasen der beiden in AG interferirenden Strahlen ist also allgemein:

$$\frac{wo}{V\tau}+\frac{oG}{O\tau}-\frac{eG}{E\tau}=U.$$

Es sey φ der Einfallswinkel des Strahls AG, d. h. der Winkel, den er mit der Normale GN bildet, und $\psi_{\prime}$, $\psi_{\prime\prime}$ seyen die Winkel welche die Strahlen Go und Ge mit GN bilden; es seyen $\omega_{\prime}$, $\omega_{\prime\prime}$ die Winkel, wel-

che die durch GN, Go und durch GN, Ge gelegten Ebenen mit der Einfallsebene, durch GA, GN gelegt, bilden. In Fig. 2 Taf. I ist $\omega_{,}=oNO$ und $\omega_{,,}=eNE$. Es sey d die Dicke des Blättchens. Alsdann ist:

$$Go=\frac{d}{\cos\psi_{,}} \qquad Ge=\frac{d}{\cos\psi_{,,}}.$$

Es ist ferner $ow=OW=OE\sin WEO$; der Winkel $WEO=\varphi$ und $OE=NE-NO=Ne\cos\omega_{,,}-No\cos\omega_{,}=d\tang\psi_{,,}\cos\omega_{,,}-d\tang\psi_{,}\cos\omega_{,}$; also

$$ow=d[\tang\psi_{,,}\cos\omega_{,,}-\tang\psi_{,}\cos\omega_{,}]\sin\varphi.$$

Man hat also:

$$U=\frac{d}{\tau}\left\{\frac{(tg\psi_{,,}\cos\omega_{,,}-tg\psi_{,}\cos\omega_{,})}{V}\sin\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{O\cos\psi_{,}}-\frac{1}{E\cos\psi_{,,}}\right\} \; \ldots\ldots \quad (1)$$

Es kommt nun darauf an, die Gröfsen ω, $\omega_{,,}$, $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$ allgemein zu bestimmen.

Wir wollen die Lage der verschiedenen in Betracht zu nehmenden Linien beziehen auf die drei rechtwinkligen Elasticitätsaxen x, y, z des Blättchens, die wir uns durch den Punkt G gelegt denken. Es seyen a', b', c' die Cosinusse der Winkel, welche der Strahl Go mit den Axen x, y, z bildet, und A, B, C die Cosinusse der Winkel, welche die Normale GN mit denselben Axen bildet; alsdann sind die Cosinusse der Winkel, welche mit den Elasticitätsaxen x, y, z die Durchschnittslinie der durch GN und Go gelegten Ebene mit dem Blättchen, d. i. die Linie No, bildet:

$$\frac{A\cos\psi_{,}-a_{,}}{\sin\psi_{,}},\; \frac{B\cos\psi_{,}-b_{,}}{\sin\psi_{,}},\; \frac{C\cos\psi_{,}-c_{,}}{\sin\psi_{,}} \; \ldots \quad (2)$$

Es seyen α, β, γ die Cosinusse der Winkel, welche AG mit den Elasticitätsaxen bildet, und α', β', γ' seyen die Cosinusse, welche die Normale der zu dem Strahle Go gehörenden Wellenebene mit jenen Axen einschliefst. Diese Normale liegt in der durch AG und GN gelegten Einfallsebene, und bildet mit GN einen

Winkel, welchen ich mit $\varphi_{,}$ bezeichnen werde; bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zum Strahl Go gehörenden Wellenebene mit μ', so ist $\varphi_{,}$ durch folgende Relation bestimmt:

$$\mu' \sin\varphi = V \sin\varphi_{,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Durchschnittslinie des Blättchens mit der durch GN und GA gelegten Ebene ist also identisch mit der Linie in welcher das Blättchen geschnitten wird von der Ebene, welche durch GN und durch die durch α', β', γ' bestimmten Normale gelegt ist, und die Cosinusse ihrer Winkel mit den Axen x, y, z sind:

$$\begin{aligned} \frac{A\cos\varphi-\alpha}{\sin\varphi} &= \frac{A\cos\varphi_{,}-\alpha'}{\sin\varphi_{,}} \\ \frac{B\cos\varphi-\beta}{\sin\varphi} &= \frac{B\cos\varphi_{,}-\beta'}{\sin\varphi_{,}} \quad . \quad . \quad . \quad (4) \\ \frac{C\cos\varphi-\gamma}{\sin\varphi} &= \frac{C\cos\varphi_{,}-\gamma'}{\sin\varphi_{,}} \end{aligned}$$

Der Winkel $\omega_{,}$ ist derjenige, welchen die beiden durch (2) und durch (4) bestimmten Linien mit einander bilden; man hat also:

$$\begin{aligned} \cos\omega_{,} = \left(\frac{A\cos\varphi_{,}-a'}{\sin\psi_{,}}\right)\left(\frac{A\cos\varphi_{,}-\alpha'}{\sin\varphi_{,}}\right) \\ + \left(\frac{B\cos\psi_{,}-b'}{\sin\psi_{,}}\right)\left(\frac{B\cos\varphi_{,}-\beta'}{\sin\varphi_{,}}\right) \\ + \left(\frac{C\cos\psi_{,}-c'}{\sin\psi_{,}}\right)\left(\frac{C\cos\varphi-\gamma'}{\sin\varphi_{,}}\right) \end{aligned}$$

Führt man die angedeuteten Operationen aus, und bemerkt, dafs $A^2+B^2+C^2=1$, $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1$, $a'^2+b'^2+c'^2=1$, und dafs:

$$\begin{aligned} Aa'+Bb'+Cc' &= \cos\psi_{,} \\ A\alpha'+B\beta'+C\gamma' &= \cos\varphi_{,}, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\cos\omega_{,} = \frac{1}{\sin\psi_{,}\sin\varphi_{,}}\left\{a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'-\cos\varphi_{,}\cos\psi_{,}\right\}.$$

Die Gröfse $a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'$ ist der Cosinus des Winkels, den der Strahl Go mit der Normale der ihm an-

gehörigen Wellenebene bildet. Denkt man sich den Strahl Go als Radius vector der Wellenoberfläche, welche um x, y, z mit den dem Blättchen angehörenden Elasticitätsconstanten beschrieben ist, so ist die ihm entsprechende Wellenebene die Tangentialebene dieser Oberfläche an demjenigen Punkte, wo sie vom Strahle getroffen wird. Die Länge dieses Radius vector ist die mit O bezeichnete Gröfse, und die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Senkrechte stellt unser μ' vor. Man hat also in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypothenuse O und dessen eine Cathete μ' ist:

$$\mu' = O[a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma']$$

und es verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck für $\cos\omega_,$ in:

$$\cos\omega_, = \frac{\frac{\mu'}{O} - \cos\psi_,\cos\varphi_,}{\sin\varphi_,\sin\psi_,} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Bezeichnet man mit $\omega_{,,}$, $\varphi_{,,}$, $\psi_{,,}$, μ'', E dieselben Gröfsen in Beziehung auf den Strahl Ge, welche für den Strahl Go mit $\omega_,$, $\varphi_,$, $\psi_,$, $\mu_,$, O bezeichnet sind, so hat man:

$$\cos\omega_{,,} = \frac{\frac{\mu''}{E} - \cos\psi_{,,}\cos\varphi_{,,}}{\sin\varphi_{,,}\sin\psi_{,,}} \quad . \quad . \quad (6)$$

Betrachten wir nun den in (1) gegebenen Unterschied der Phase U, und bemerken, dafs für den Strahl Go nach (3) $\mu'\sin\varphi = V\sin\varphi_,$, und dafs eben so für den Strahl Ge ist:

$$\mu''\sin\varphi = V\sin\varphi_{,,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und dafs demzufolge:

$$\frac{\tang\psi_{,,}\cos\omega_{,,}\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\psi_{,,}\sin\varphi_{,,}\cos\omega_{,,}}{\mu_{,,}\cos\psi_{,,}}$$

$$\frac{\tang\psi_,\cos\omega_,\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\psi_,\sin\varphi_,\cos\omega_,}{\mu_,\cos\psi_,},$$

so können wir U unter folgende Form bringen:

$$U=\left\{\left(\frac{\sin\psi_{\prime\prime}\sin\varphi_{\prime\prime}\cos\omega_{\prime\prime}}{\mu_{\prime\prime}\cos\psi_{\prime\prime}}-\frac{1}{E\cos\psi_{\prime\prime}}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\sin\psi'\sin\varphi_{\prime}\cos\omega_{\prime}}{\mu_{\prime}\cos\psi_{\prime}}-\frac{1}{O\cos\psi_{\prime}}\right)\right\}$$

Aus (5) und (6) erhält man aber:

$$\frac{\sin\psi_{\prime}\sin\varphi_{\prime}\cos\omega_{\prime}}{\mu'\cos\psi_{\prime}}=\frac{1}{O\cos\psi}-\frac{\cos\varphi_{\prime}}{\mu'}$$
$$\frac{\sin\psi_{\prime\prime}\sin\varphi_{\prime\prime}\cos\omega_{\prime\prime}}{,\mu''\cos\psi_{\prime\prime}}=\frac{1}{E\cos\psi_{\prime\prime}}-\frac{\cos\varphi_{\prime\prime}}{\mu''}$$

und diese Werthe in U substituirt, geben:

$$U=\frac{d}{\tau}\left\{\frac{\cos\varphi_{\prime}}{\mu'}-\frac{\cos\varphi_{\prime\prime}}{\mu''}\right\}\quad .\ .\ .\ (8)$$

oder wenn man die Werthe für $\mu_{\prime}$ und $\mu_{\prime\prime}$ aus (3) und (7) setzt:

$$U=\frac{d}{\tau}\cdot\frac{\sin\varphi}{V}\left\{\frac{\sin(\varphi_{\prime\prime}-\varphi_{\prime})}{\sin\varphi_{\prime\prime}\sin\varphi_{\prime}}\right\}\quad .\ .\ (9)$$

Diefs, nämlich (8) und (9), ist die einfachste Form, auf welche sich die vollständigen Ausdrücke des Unterschiedes der Phase der beiden in der Richtung AG interferirenden Strahlen zurückführen läfst. Sie sind dabei noch von einer solchen Allgemeinheit, dafs sie kein besonderes Gesetz der doppelten Strahlenbrechung voraussetzen, und Anwendung finden sowohl auf die Krystalle in welchen die Doppelbrechung das Fresnel'sche Gesetz befolgt, als auch auf solche, wenn es deren giebt, für welche diefs Gesetz nicht ausreicht.

Die scheinbaren optischen Axen sind diejenigen Strahlen AG, in welchen der Unterschied der Phase verschwindet, d. i. $U=0$, also:

$$\varphi_{\prime}=\varphi_{\prime\prime}\ \text{und}\ \mu'=\mu''.$$

Die scheinbaren optischen Axen werden also von Strahlen erzeugt, deren Wellenebenen parallel mit den Kreisschnitten der Elasticitätsfläche sind, und man mufs die Normalen dieser Schnitte die wahren optischen Axen nennen.

Construirt man in dem Blättchen *abcd*, Fig. 3 Taf. I,

einen der Kreisschnitte der Elasticitätsfläche CG, und betrachtet diesen als eine aus dem Blättchen austretende Wellenebene, so erzeugt sie die Wellenebene BA, deren Durchschnittslinie mit der Austrittsfläche cd parallel ist mit der Linie, in welcher cd geschnitten wird von dem Kreisschnitt CG, und deren Neigung mit cd, d. i. $\angle GBA = \varphi$, durch die Neigung von cd gegen den Kreisschnitt, d. i. durch den $\angle CGB = \varphi_{,}$, so bestimmt ist, dafs, wenn b die mittlere Elasticitätsconstante des Blättchens vorstellt, $b \sin\varphi = V \sin\varphi_{,}$ ist. Der zur Wellenebene BA gehörige Strahl, d. i. die auf BA gezogene Senkrechte, ist eine der scheinbaren optischen Axen.

Es sey das Blättchen $abcd$ so geschnitten, dafs seine Normale diejenige Elasticitätsaxe ist, welche den Winkel zwischen den optischen Axen halbirt. Der Werth dieser Axe sey c, der Werth der mittleren Axe sey b und der der dritten a. Die Kreisschnitte sind parallel mit b, und die Cosinusse ihrer Neigungen α, γ gegen Axen a und c sind:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}} \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}.$$

Der in Fig. 3 Taf. I mit $\varphi_{,}$ bezeichnete Winkel ist gleich α, und da $\sin\alpha = \cos\gamma$, so hat man in diesem Fall für die Neigung der scheinbaren Axe GA gegen die Normale des Blättchens:

$$\sin\varphi = \frac{V}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}.$$

Legt man für die Gröfsen a, b, c die Werthe zu Grunde, welche Hr. Rudberg aus seinen Messungen am Aragonit erhalten hat (diese Annalen, Bd. XVII S. 16), wo sie mit $\frac{1}{n_{,,,}}$, $\frac{1}{n_{,,}}$, $\frac{1}{n_{,}}$ bezeichnet sind, wo $V=1$ gesetzt ist, so dafs also:

$$\sin\varphi = n_{\prime\prime}\sqrt{\frac{\frac{1}{n_{\prime\prime}^2}-\frac{1}{n_{\prime\prime\prime}^2}}{\frac{1}{n_{\prime}^2}-\frac{1}{n_{\prime\prime\prime}^2}}}$$

so erhält man als Mittel aus den Werthen der verschiedenen Strahlen *H*, *G*, *F* etc. für φ den Werth 15° 23′, und also als scheinbaren Winkel der optischen Axen 30° 46′. Rudberg's Annahme war, daſs

$$\sin\varphi = n_{\prime\prime}\sqrt{\frac{n_{\prime\prime}^2}{n_{\prime}^2}-\frac{n_{\prime\prime}^2}{n_{\prime\prime\prime}^2}}$$

sey, was als mittleren Werth des Winkels der scheinbaren optischen Axen 33° 57′ gab. — Es ist auffallend, daſs die directen Beobachtungen dieses Winkels sich so weit von dem vorliegenden Resultat entfernen; Rudberg hat statt 30° 46′ gefunden 32°, und Brewster (diese Ann. Bd. XXVII S. 504), nachdem er seine frühere Angabe berichtigt hat 29° 56′.

§. 2.

Ich werde bei dieser Gelegenheit auf die Theorie der Farbenerscheinungen zweiaxiger Krystalle, da diese bis jetzt nirgends für den Fall des schiefen Durchgangs der Lichtstrahlen entwickelt worden ist, noch näher eingehen.

Es sey *AB*, Fig. 4 Taf. I, ein unter dem Azimuth α, von der Einfallsebene an gerechnet, polarisirter, in das Blättchen *ab* eintretender Strahl. Die Intensität seiner Bewegung sey *I*; alsdann sind die Intensitäten der Bewegungen der beiden nach der Einfallsebene und senkrecht darauf polarisirten Strahlen, in welche *I* zerlegt werden kann, $I\cos\alpha$ und $I\sin\alpha$. Der Strahl *I* erzeugt im Allgemeinen einen gewöhnlichen Strahl *BD* und einen ungewöhnlichen *BC*, deren Intensitäten unter einander verschieden sind, da sie von α abhängen. Die Intensität der Bewegung des gewöhnlichen Strahls werde ich mit $D_{\prime}$ die des ungewöhnlichen mit $D_{\prime\prime}$ bezeichnen. Die Strahlen $D_{\prime}$ und $D_{\prime\prime}$ erzeugen zwei aus dem Blätt-

chen austretende Strahlen, von denen jeder in einem anderen Azimuth polarisirt ist, da die Richtung ihrer Polarisationsebene abhängig ist von der Lage der Polarisationsebenen der erzeugenden Strahlen. Jeden der durch $D_{,}$ und $D_{,,}$ erzeugten Strahlen denke man sich in zwei componirende Strahlen zerlegt, parallel und senkrecht polarisirt gegen die Austrittsebene, welche durch den ausgetretenen Strahl und die Normale des Blättchens gelegt ist, und es seyen die Intensitäten der Geschwindigkeiten dieser Componenten des durch $D_{,}$ erzeugten Strahls: $S_{,}$ und $P_{,}$ und des durch $D_{,,}$ erzeugten Strahls $S_{,,}$ und $P_{,,}$. Endlich sollen die austretenden Strahlen $(S_{,}, P_{,})$ und $(S_{,,}, P_{,,})$ auf eine gemeinschaftliche Polarisationsebene zurückgeführt werden, z. B. durch eine Turmalinplatte, deren Azimuth, von der Austrittsebene an gerechnet, $=\beta$ ist; jeder dieser Strahlen giebt eine nach β polarisirte Componente, deren Intensität der Bewegung mit $I_{,}$ und $I_{,,}$ bezeichnet werden soll; es ist:

$$\left.\begin{aligned} I_{,} &= P_{,} \sin\beta + S_{,} \cos\beta \\ I_{,,} &= P_{,,} \sin\beta + S_{,,} \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ein mit AB parallel auf das Blättchen fallender Strahl, $A'B'$ giebt dieselben Intensitäten der Bewegung des Theiles der austretenden Strahlen, welcher im Azimuth β polarisirt ist. Es sind also I' und I'' die Intensitäten der Bewegung der beiden nach dem Austritt aus dem Blättchen mit einander interferirenden Strahlen. Den Unterschied ihrer Phasen haben wir vorher gefunden und mit U bezeichnet. Die Intensität des Lichtes also, welche aus der Interferenz der Strahlen $I_{,}$ und $I_{,,}$ entsteht, die mit A^2 bezeichnet werden möge, ist also:

$$A^2 = I_{,}^2 + I_{,,}^2 + 2 I_{,} I_{,,} \cos 2U\pi = (I_{,} + I_{,,})^2 - 4 I_{,} I_{,,} \sin^2 U\pi$$

oder, wenn statt $I_{,}$, $I_{,,}$ und U ihre Werthe gesetzt werden:

$$A^2 = [(P_{\prime} + P_{\prime\prime}) \sin\beta + (S_{\prime} + S_{\prime\prime}) \cos\beta]^2$$
$$- 4 (P_{\prime} \sin\beta + S_{\prime} \cos\beta)(P_{\prime\prime} \sin\beta + S_{\prime\prime} \cos\beta) \times$$
$$\times \sin^2 \left\{ \frac{d \sin\varphi \sin(\varphi_{\prime} - \varphi_{\prime\prime})}{\lambda \sin\varphi_{\prime} \sin\varphi_{\prime\prime}} \right\} \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo $V\tau$ mit der Undulationslänge $=\lambda$ vertauscht worden ist.

Die Werthe von $P_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$, $S_{\prime}$, $S_{\prime\prime}$ hängen mittelst $D_{\prime}$ und $D_{\prime\prime}$ von I und α ab; die genauen Ausdrücke dieser Gröfsen setzen eine Erweiterung der Theorie über die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes voraus, welche Fresnel (diese Annal. Bd. XXII S. 90) gegeben hat, nämlich ihre Ausdehnung auf die Oberflächen krystallinischer Substanzen. Aus Untersuchungen, die ich in dieser Hinsicht angestellt habe, und die ich an einem anderen Orte mittheilen werde, folgt, was auch an sich klar ist, dafs die Fresnel'schen Ausdrücke über die Intensitäten der reflectirten und gebrochenen Strahlen, obgleich sie genau nur für unkrystallinische Körper gültig sind, doch als eine erste und sehr starke Annäherung auch auf krystallinische Substanzen können angewandt werden. Die vollständigen Ausdrücke werden aufserdem so complicirt, dafs es immer von einigem Interesse seyn wird, die einfacheren angenäherten Werthe gesondert zu haben.

Wie oben bedeute φ den Einfallswinkel des Strahls AB, oder den Winkel, den seine Wellenebene mit der brechenden Ebene des Blättchens bildet, und die Winkel, welche diese brechende Ebene mit den Wellenebenen von $D_{\prime}$ und $D_{\prime\prime}$ bildet, seyen wiederum $\varphi_{\prime}$ und $\varphi_{\prime\prime}$. Es sey ψ ein Hülfswinkel $= \frac{1}{2}(\varphi_{\prime} + \varphi_{\prime\prime})$, und die Wellenebene, deren Normale in der Einfallsebene liegt, und welche mit der brechenden Ebene den Winkel ψ bildet, heifse die Hülfswelle. Man nehme nun an, die unter φ einfallende Wellenebene des Strahles I erleide nur eine einfache Brechung unter dem Winkel ψ; die gebrochene Wellenebene ist also die Hülfswelle. Die Intensität der

Bewegung in der Hülfswelle parallel mit der Einfallsebene sey D_s, senkrecht auf der Einfallsebene sey D_p. Denken wir uns diese zweierlei Bewegungen D_s und D_p zerlegt nach den zwei Richtungen, in welchen die Bewegung dieser Hülfswelle stattfinden müfste, je nachdem sie die gewöhnliche oder die ungewöhnliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit hätte, so sind die Componenten der Bewegung in diesen zwei Richtungen die angenäherten Werthe der Gröfsen, welche mit $D_{\prime}$ und $D_{\prime\prime}$ bezeichnet sind, und es sollen diese Componenten daher mit denselben Buchstaben bezeichnet werden. Es sey $x_{\prime}$ das Azimuth der Polarisationsebene der Hülfswelle in dem Falle, wenn sie sich mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit fortpflanzte, d. i. der Winkel, den diese Polarisationsebene mit der Einfallsebene bildet, $x_{\prime\prime}$ sey das Azimuth der Polarisationsebene, wenn die Hülfswelle die ungewöhnliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit hätte. Diese beiden Polarisationsebenen stehen auf einander senkrecht, es ist also $x'+x''=90°$. Man hat nun:

$$D_p = D_{\prime} \sin x_{\prime} - D_{\prime\prime} \sin x_{\prime\prime}$$
$$D_s = D_{\prime} \cos x_{\prime} + D_{\prime\prime} \cos x_{\prime\prime}$$

Für D_p und D_s kann man die von Fresnel für die einfache Brechung gegebenen Ausdrücke setzen:

$$D_p = \frac{2 I \sin\alpha \sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}$$
$$D_s = \frac{2 I \cos\alpha \sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man, wegen $x_{\prime}+x_{\prime\prime}=90°$:

$$\left.\begin{aligned} D_{\prime} &= \frac{2 I \sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)} \left\{ \cos\alpha \sin x_{\prime} + \frac{\sin\alpha \sin x_{\prime}}{\cos(\varphi-\psi)} \right\} \\ D_{\prime\prime} &= \frac{2 I \sin\psi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)} \left\{ \cos\alpha \sin x_{\prime} - \frac{\sin\alpha \cos x_{\prime}}{\cos(\varphi-\psi)} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (3)$$

Die Hülfswelle kann gedacht werden als bestehend aus zwei nach $x_{\prime}$ und $x_{\prime\prime}$ polarisirten Wellenebenen; die erstere erzeugt durch ihren Austritt aus dem Krystall die

Componenten der Geschwindigkeit des gewöhnlichen Strahls, welche mit $S_{,}$ und $P_{,}$ bezeichnet worden sind; durch die zweite entstehen die Componenten des ungewöhnlichen Strahls, die mit $S_{,,}$ und $P_{,,}$ bezeichnet worden. Für diese Componenten können wiederum annäherungsweise die Fresnel'schen Ausdrücke angewandt werden, nämlich:

$$S_{,}=\frac{2\sin\varphi\cos\psi\cos x_{,}D_{,}}{\sin(\varphi+\psi)}\,,\quad P_{,}=\frac{2\sin\varphi\cos\psi\sin x_{,}D_{,}}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}$$

$$S_{,,}=\frac{2\sin\varphi\cos\psi\sin x_{,}D_{,,}}{\sin(\varphi+\psi)}\,,\quad P_{,,}=\frac{2\sin\varphi\cos\psi\sin x_{,}D_{,,}}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}$$

werden hierin die Werthe von $D_{,}$ und $D_{,,}$ gesetzt, so erhält man endlich:

$$\left.\begin{aligned}
S_{,}&=\frac{I\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left\{\cos\alpha\cos x+\frac{\sin\alpha\sin x}{\cos(\varphi-\psi)}\right\}\cos x\\
P_{,}&=\frac{I\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}\left\{\cos\alpha\cos x+\frac{\sin\alpha\sin x}{\cos(\varphi-\psi)}\right\}\sin x\\
S_{,,}&=\frac{I\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left\{\cos\alpha\sin x-\frac{\sin\alpha\cos x}{\cos(\varphi-\psi)}\right\}\sin x\\
P_{,,}&=\frac{I\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}\left\{\cos\alpha\sin x-\frac{\sin\alpha\cos x}{\cos(\varphi-\psi)}\right\}\cos x
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (4)$$

woraus sich ergiebt:

$$S_{,}+S_{,,}=\frac{I\cos\alpha\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\,,$$

$$P_{,}+P_{,,}=\frac{I\sin\alpha\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)\cos^2(\varphi-\psi)}$$

Setzt man diese Werthe der Gröfsen $S_{,}$, $S_{,,}$, $P_{,}$, $P_{,,}$ in den Ausdruck für A^2 in (2), so erhält man die Intensität der beiden interferirenden Strahlen, ausgedrückt allein durch Gröfsen, welche abhängen von der Lage der einfallenden und gebrochenen Strahlen. Wir wollen der Einfachheit wegen den gemeinschaftlichen Factor

$$\frac{\sin 2\varphi\sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}=B$$

setzen, alsdann wird:

$$A^2 = B^2 \Big\{ \left(\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos(\varphi-\psi)} + \cos\alpha\cos\beta \right)^2 I^2$$
$$+ 4 \Big[\left(\cos\alpha\cos x + \frac{\sin\alpha \sin x}{\cos(\varphi-\psi)} \right) \times$$
$$\times \left(\cos\alpha \sin x - \frac{\sin\alpha \cos x}{\cos(\varphi-\psi)} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\sin x \sin\beta}{\cos(\varphi-\psi)} + \cos x \cos\beta \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\cos x \sin\beta}{\cos(\varphi-\psi)} - \sin x \cos\beta \right) \times$$
$$\times I^2 \sin^2 \left(\frac{d \sin\varphi \sin(\varphi_{,} - \varphi_{,,})}{\lambda \sin\varphi_{,} \sin\varphi_{,,}} \right) \pi \Big] \Big\} \quad . . (5)$$

Diefs ist der angenäherte Werth der Lichtintensität für homogene Strahlen; bei weifsem Lichte hat man für jede der einzelnen Farben einen ähnlichen Ausdruck, die, nach der Newton'schen Regel componirt, die resultirende Farbe geben. Ich werde die Operation dieser Zusammensetzung einzelner Farben zu einer resultirenden durch das Zeichen Σ andeuten. In den Fällen, wo der Einflufs der verschiedenen Brechbarkeit der einzelnen Farben in dem Ausdruck von A^2 vernachlässigt werden kann, und nun ihre verschiedenen Undulationslängen zu berücksichtigen sind, erhält man, wenn $A_{,}^2$ die Intensität der resultirenden Farbe bedeutet, und I_{λ}^2 die Intensität der Farbe mit der Undulationslänge λ, welche im einfallenden Lichte vorhanden ist, und man setzt: $\Sigma I_{\lambda}^2 = W^2$

$$A_{,}^2 = B_{,}^2 \left(\cos\alpha\cos\beta + \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos(\varphi-\psi)} \right)^2 W^2$$
$$- 4 B_{,}^2 \left(\cos\alpha \cos x + \frac{\sin\alpha \sin x}{\cos(\varphi-\psi)} \right) \times$$
$$\times \left(\cos\alpha \sin x - \frac{\cos x \sin\alpha}{\cos(\varphi-\psi)} \right) \times$$
$$\times \left(\cos\beta \cos x + \frac{\sin\beta \sin x}{\cos(\varphi-\psi)} \right) \times$$